

Elementarna matematika 2

Zadaci s vježbi

Jedanaesti tjedan

Zadatak 1. Odredite za svaku od sljedećih krivulja drugog reda je li elipsa, hiperbola ili parabola. Ako je neka od njih elipsa, odredite je li kružnica ili ne.

(a) $x^2 + 4xy + 3y^2 - y - 1 = 0$.

(b) $5x^2 - 6xy + 18y^2 - 9 = 0$.

(c) $y^2 + 2y + 4xy - 16x - 19 = 0$.

(d) $2x^2 - y^2 - 2xy - 2y + 2 = 0$.

(e) $x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$.

Zadatak 2. Odredite jednadžbe tangenti kroz točku $P = (2, 3)$ na:

(a) kružnicu $(x - 1)^2 + y^2 = 1$,

(b) hiperbolu $x^2 - y^2 = 9$.

Zadatak 3. Neka su p, q zadani realni brojevi, te neka su r, R zadani pozitivni realni brojevi. Odredite geometrijsko mjesto svih točaka P za koje vrijedi da se kružnica radijusa R čije središte je P siječe s kružnicom $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ pod pravim kutem.

Zadatak 4. Dokažite da sve polare točaka pravca $y = x$ s obzirom na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ prolaze istom točkom. Koja je to točka?

Zadatak 5. Neka su $a, b > 0$ realni brojevi. Dokažite da se tangente iz točke P na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sijeku pod pravim kutem ako i samo ako P leži na kružnici radijusa $\sqrt{a^2 + b^2}$ sa središtem u ishodištu.

Zadatak 6. Dana je hiperbola i neka tangenta na nju. Dokažite da diralište tangente i hiperbole raspolavlja dužinu čije su rubne točke presjeci te tangente s asimptotama hiperbole.